DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures. (P)

$\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ des réels ou $\mathbb{C}$ des complexes.

$\mathbb{K}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $P \wedge Q$ le PGCD de P et Q, $P \vee Q$ le PPCM de P et Q, $P \mid Q$ si P divise Q.

$\delta(P)$ désigne le degré de P, polynôme non nul et vaut $-\infty$ si $P = 0$.

On identifie les polynômes et les fonctions polynômiales associées.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n où n est un entier naturel non nul.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E, GL(E) celui de ses automorphismes, e l'application identité de E dans E.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et si F est un sous espace vectoriel de E stable par f, on note $f_{|F}$ l'élément de $\mathcal{L}(F)$ tel que $\forall x \in F$, $f_{|F}(x) = f(x)$.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $Sp(f)$ le spectre de f. (ensemble de ses valeurs propres)

$f^0 = e$ et si $p \in \mathbb{N}$, $f^{p+1} = f \circ f^p$.

Si $P \in \mathbb{K}[X]-\{0\}$ et si $P(X) = \sum_{k=0}^{\delta(P)} a_k X^k$ on note P(f) l'élément $\sum_{k=0}^{\delta(P)} a_k f^k$ de $\mathcal{L}(E)$.

Si P est le polynôme nul,on pose P(f) = 0

Π_f est le polynôme caractéristique de f.

Si $P \in \mathbb{K}[X]-\{0\}$, P est dit unitaire (ou normalisé) si et seulement si $a_{\delta(P)} = 1$.

On rappelle (théorème de Bezout) : Soit $(P_1,P_2) \in \mathbb{K}[X]^2$, tel que $P_1 \wedge P_2 = 1$; $\exists (U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$, tel que : $UP_1 + VP_2 = 1$.

I Quelques résultats sur les polynômes d'endomorphismes. ($f \in \mathcal{L}(E)$)

1° Soit $(Q_1,Q_2) \in \mathbb{K}[X]^2$, montrer que : $(Q_1 \times Q_2)(f) = Q_1(f) \circ Q_2(f) = Q_2(f) \circ Q_1(f)$.

2° Soit $(Q_1,Q_2) \in \mathbb{K}[X]^2$,tel que $Q_1 \wedge Q_2 = 1$

Montrer que : $\mathrm{Ker}(Q_1(f)) \oplus \mathrm{Ker}(Q_2(f)) = \mathrm{Ker}(Q_1 \times Q_2)(f)$.

3° Soit $p \in \mathbb{N}^*$, Soit $(Q_1,\ldots,Q_p) \in \mathbb{K}[X]^p$ tel que $(Q_1 \ldots Q_p)(f) = 0$ et

$\forall (k,l) \in \{1..p\}^2$, $k \neq l \Rightarrow Q_k \wedge Q_l = 1$.

Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(Q_k(f))$.

4° Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1}) \Rightarrow \mathrm{Ker}(f^{p+1}) = \mathrm{Ker}(f^{p+2})$

5° a. Si $f \in GL(E)$ montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$

b. Si $f \in \mathcal{L}(E)-GL(E)$ et $p \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\mathrm{Ker}(f^p) \neq \mathrm{Ker}(f^{p+1}) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f^{p+1}) \geq p+1$$

c. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f^n) = \mathrm{Ker}(f^{n+1})$

6° On note : $I_f = \{ P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(f) = 0 \}$

$J_f = \{ P \in I_f \ / \ P \neq 0, \ \forall Q \in I_f-\{0\}, \ \delta(P) \leq \delta(Q) \}$.

a. En considérant $e,f,\ldots,f^{n^2}$, montrer que $I_f \neq \{0\}$.

b. Montrer que $J_f \neq \emptyset$.

c. Montrer que $\forall (P,Q) \in (J_f)^2$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$, $P = \lambda Q$.

d. Montrer que $\exists ! P_f \in J_f$, P_f unitaire.

e. Soit $P\in\mathbb{K}[X]-\{0\}$, montrer que : $P\in I_f \Leftrightarrow P_f | P$.

7° a. Soit u quelconque de E et λ de $\mathbb{K}$.

Montrer que $f(u) = \lambda u \Rightarrow \forall P\in\mathbb{K}[X],\ [P(f)](u) = P(\lambda)u$.

b. Montrer que $P_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda\in Sp(f)$.

c. En déduire que $\Pi_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$.

8° On suppose qu'il existe un entier naturel non nul p et p sous-espaces vectoriels de E notés E_k tels que $E = \overset{p}{\underset{k=1}{\oplus}} E_k$ et $\forall k\in[1,n]\cap\mathbb{N},\ f(E_k)\subset E_k$.

On pose $f_k = f_{|E_k}$.

a. On suppose p=2, montrer que $P_f = P_{f_1} \vee P_{f_2}$.

b. Montrer que $\forall p\in\mathbb{N},\ p\geq 2,\ P_f = PPCM(P_{f_1}, P_{f_2} \ldots, P_{f_p})$

PARTIE II Etude d'un exemple.

On conserve les notations de la partie I.

Dans cette partie et seulement dans celle-ci n = 4, $B = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une base de E et f est l'élément de $\mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base B est : $M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1° Déterminer Π_f.

2° On note E_1 l'espace engendré par (u_1,u_2,u_3) avec :

$u_1 = e_1+e_2+e_3+e_4,\quad u_2 = e_1+e_2-e_3-e_4,\quad u_3 = e_1-e_2+e_3-e_4$.

On note E_2 l'espace engendré par $u_4 = e_1-e_2-e_3-e_4$.

a. Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires et stables par f.

b. Déterminer P_{f_2}.

c. Justifier le fait que (u_1,u_2,u_3) est une base de E_1 et déterminer la matrice A de f_1 dans cette base.

d. Calculer A^2 et en déduire P_{f_1}.

e. En déduire P_f et montrer que : $P_f | \Pi_f$.

PARTIE III Etude du cas complexe. ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) On note : $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ les racines distinctes de P_f, $n_1,\ldots,n_p$ leurs ordres respectifs de multiplicité, $E_k = Ker\left((f-\lambda_k e)^{n_k}\right)$, et $f_k = f_{|E_k}$

1° Montrer que E est la somme directe des E_k. (Si $x\in E$, on notera $x = x_1+\ldots+x_p$ où $x_k\in E_k$)

2° Montrer que : $\forall k\in\{1,\ldots,p\},\ P_{f_k}(X) = (X-\lambda_k)^{n_k}$.

3° Montrer que : $\forall k\in\{1,\ldots,p\},\ \Pi_{f_k}(X) = (\lambda_k-X)^{\dim(E_k)}$.

4° a. Montrer que : $\forall k\in\{1,\ldots,p\},\ n_k \leq \dim(E_k)$. b. En déduire : $\Pi_{f_k}(f_k) = 0$.

5° Montrer que : $\forall x\in E,\ \left(\Pi_f(f)\right)(x) = \left(\Pi_f(f_1)\right)(x_1)+\ldots+\left(\Pi_f(f_p)\right)(x_p)$.

6° Montrer que : $P_f | \Pi_f$.